

Элементарная теория машущего полета

Ю. И. Лобановский

El Cóndor Pasa

Вероятно, наиболее известная перуанская мелодия [1]

The laws of aerodynamics prove that the bumblebee should be incapable of flight.

Bumblebee paradox – folklore of the 20th century

Краткое содержание

В работе кратко описаны: вихревая теория стационарного обтекания крыла, импульсная теория несущего винта, а также теории гидравлического удара и вихревых дорожек Кармана. На основе информации, имеющейся в этих разделах аэродинамики, построена композитная элементарная теория несущих характеристик машущего крыла. Проведено сравнение расчетных данных с результатами наблюдений за полетами птиц, насекомых и данными первого технического микрообъекта, предназначенного для машущего полета. Сформулирован истинный парадокс шмеля. Проведено сравнение энергетической эффективности создания подъемной силы винтом и машущим крылом, найдены граница между областями превосходства этих способов создания подъемной силы на Земле и на спутнике Сатурна Титане.

Ключевые слова: Крыло – Машущее крыло – Винт – Самолет – Вертолет – Птица – Насекомое – Вихрь – Отрыв потока – Подъемная сила – Мощность

Таблица символов

b – длина хорды профиля крыла
 c – скорость звука
 C_R – коэффициент суммарной аэродинамической силы
 C_y – коэффициент подъемной силы
 C_x – коэффициент сопротивления
 C_{x0} – коэффициент сопротивления при нулевой подъемной силе
 C_y^α – производная коэффициента подъемной силы по углу атаки
 D – диаметр винта
 d – ширина препятствия в потоке жидкости
 e – эмпирический фактор Освальда
 G – вес
 g – ускорение свободного падения
 h – расстояние между рядами вихрей
 I – значение определенного интеграла
 K – аэродинамическое качество
 k – эмпирический коэффициент
 L – размах крыла
 m – масса
 M^* – критическое число Маха
 N – число лопастей винта
 n – частота взмахов крыла
 p – давление
 p^* – давление торможения
 q – скоростной напор
 R – суммарная аэродинамическая сила
 r – радиус
 Re – число Рейнольдса
 S – площадь
 S_0 – площадь несущего диска
 T – тяга
 T^* – температура торможения потока
 u – индуктивная скорость
 u_0 – индуктивная скорость в плоскости винта
 v – скорость
 v^* – характерная скорость

$\langle v \rangle$ – скорость маха среднего сечения крыла
 $\langle v^* \rangle$ – средняя характерная скорость
 W – мощность
 Y – подъемная сила
 α – угол атаки
 β – коэффициент учета влияния продольного взаимодействия сечений крыла
 Γ – циркуляция
 γ – параметр
 Δ – разность
 δ – нагрузка на несущий диск
 η – коэффициент отношения интегралов
 λ – удлинение крыла
 μ – массовый расход
 ν – параметр аппроксимации
 ξ – коэффициент нормальной силы сечения крыла
 ρ – плотность
 σ – коэффициент заполнения
 φ – угол отклонения машущего крыла от горизонтальной плоскости
 ψ – угол разворота сечения крыла
 ω – угловая скорость вращения

Индексы

max – максимальный
 opt – оптимальный
 ∞ – на бесконечности
 b – граничный
 i – индуктивный
 t – теоретический
 L – по полуразмаху
 ψ – по углу разворота
 K – по Кирхгофу
 R – по Релею

I. Введение

Современные летательные аппараты тяжелее воздуха используют для своего полета в атмосфере либо неподвижные крылья (такowymi в рассматриваемых в данной работе аспектах являются как крылья с выдвинутой механизацией, так и крылья изменяемой геометрии), либо несущие винты. Поэтому, аэродинамические характеристики именно этих средств создания подъемной силы изучены наиболее полно. В противовес этому в живой природе для установившегося полета (а не для более или менее продолжительного планирования) используются исключительно подвижные – машущие крылья. Этот способ полета в принципе является, видимо, более сложным для описания его математическими методами и, в целом, для понимания. Кроме того, его важность для человечества многократно меньше, чем всего того, что является основой авиационно-технических приложений.

Однако, интерес человека опирается не только на стремление решить какие-либо утилитарные задачи. Завораживает красота полета многих птиц от кондора, парящего над Андами, до нашей обыкновенной серой вороны, иногда проделывающей в воздухе такие кульбиты, которые не способен повторить ни один летательный аппарат, созданный руками человека. Кроме того, априорно ясно, что принципы создания подъемной силы при стационарном и нестационарном течениях в некоторых существенных аспектах должны быть существенно различны. Это означает, что, по-видимому, могут существовать области определяющих параметров, в которых преимущество имеют как тот, так и другой типы обтекания. Было бы полезно хотя бы приблизительно очертить их границы. Однако, крайняя не разработанность теории машущего полета пока не позволяла это сделать. Подобное положение дел является также удобной почвой для создания и культивирования различных мифов, например, таких как миф, о том, что по законам аэродинамики полет майского жука (в другом его варианте – шмеля) невозможен. В противовес этому мнению следует заметить, что по законам существования массовой культуры, по сути являющейся отрицанием своей прародительницы, интеллектуальные или, по крайней мере, претендующие на это звание, ресурсы тратятся не на прояснение картины окружающего нас мира, а на дальнейшее ее затуманивание. Видимо, имело бы смысл если не покончить с этим мифом, то, по крайней мере, ограничить его существование маргинальными зонами массового сознания.

Обтекание движущегося в потоке воздуха крыла птицы, безусловно, чрезвычайно сложно. Непрерывно изменяется его форма, причем, видимо, может иметь некоторое значение движение даже отдельных перьев. Да и сами уравнения течения вязкой несжимаемой жидкости (которой на этих режимах оказывается воздух) являются не только зависящими от времени, но и нелинейными. Однако, квалифицированным аэродинамикам известно, насколько сложны для моделирования даже простые на первый взгляд течения, в том числе и стационарные. Но им также известно и то, насколько простые модели могут достаточно адекватно отображать их важнейшие характеристики, если при построении этих моделей учитывались действительно определяющие данное течение аспекты. В качестве таких моделей можно вспомнить, например, вихревую теорию Кутта–Жуковского для профилей, П-образные вихри Прандтля для крыльев конечного размаха, импульсную теорию винта Рэнкина и Фруда, теорию гидравлического удара Жуковского. Почему бы и для машущего полета не могло бы быть найдено чего-либо подобного? Тем более что в соответствии с терминологией Прандтля–Кюхемана для «здоровых течений» сплошной среды [2], то есть течений устойчивых, управляемых и эффективных, в которых, как правило, на поверхности тел отсутствуют развитые отрывные области, вязкость играет заметную роль только при определении сопротивления, но не подъемной силы. Именно эти «здоровые течения» и реализуются на расчетных режимах полета современных летательных аппаратов. Следует ожидать, что эволюция живых летающих существ также привела к возникновению «здорового обтекания» их крыльев.

Тогда появляется надежда на возможность построения простой и достаточно адекватной модели, концептуально близкой к упомянутым выше моделям обтекания профилей, крыльев и винтов, и использующей элементы теоретических моделей подходящих «здоровых течений» сплошной среды. Поэтому сначала проведем краткий обзор наиболее важных аспектов теории крыла и несущего винта с точки зрения применимости используемых там подходов к элементарной теории машущего полета. При этом, так как она может быть только приближенной, при наличии дилеммы простота и приближенность результатов – сложность и точность, всегда будем выбирать первый вариант этой пары, а не второй.

II. Элементы теории стационарного обтекания крыла

В соответствии с вихревой теорией подъемной силы Кутта–Жуковского [2] при обтекании профиля (продольного сечения крыла, имеющего в поперечном направлении неограниченные размеры и неизменную форму) на нем возникают циркуляция Γ присоединенного к крылу вихря – контурный интеграл от вектора скорости по границе профиля и, вследствие этого, подъемная сила единицы размаха (погонная подъемная сила) Y :

$$Y = \rho v \Gamma$$

или

$$Y = C_y q b,$$

$$C_y = C_y^\alpha \alpha, \quad (1)$$

где ρ – плотность сплошной среды, v – скорость невозмущенного потока, C_y^α – производная коэффициента подъемной силы по углу атаки α , отсчитываемого от положения профиля при $C_y = 0$, b – длина хорды профиля, q – скоростной напор невозмущенного потока

$$q = \frac{\rho v^2}{2}$$

Для профиля Жуковского или бесконечно тонкой пластинки $C_y^\alpha = 2\pi$, а для любых других тонких профилей величина этой производной весьма близка к 2π [2]. Угол атаки мал ($\alpha \ll 1$), а вектор подъемной силы направлен строго нормально к вектору скорости набегающего потока, и совпадает с вектором суммарной аэродинамической силы R ($R \equiv Y$). Поэтому аэродинамическое сопротивление профиля крыла в невязкой жидкости отсутствует. Эту особенность двумерного невязкого обтекания принято называть парадоксом Д'Аламбера–Эйлера [2].

Таким образом, в рамках этой теории крыло может быть заменено присоединенным вихрем, интенсивность которого обеспечивает плавный сход потока с его задней острой кромки. Так как реальные крылья имеют конечный размах, а вихрь не может заканчиваться внутри объема сплошной среды, то с концов присоединенного вихря, а также везде, где изменяется интенсивность его циркуляции, например, вследствие изменения хорды профиля соответствующего крыла, по концепции Прандтля по направлению потока сходят так называемые свободные вихри. Они образуют вихревую пелену, распространяющуюся от

задней кромки крыла далее вниз по потоку на бесконечность. В простейшем варианте этой концепции крыло заменяет присоединенный вихрь постоянной интенсивности, а свободные вихри уходят только с его концов, образуя совместно так называемый П-образный вихрь [2].

Пелена свободных вихрей закручивает поток в окрестности крыла, создавая направленную вверх индуктивную компоненту скорости, уменьшая фактический угол атаки крыла и отклоняя по потоку суммарный вектор аэродинамической силы R . При этом на крыле возникает индуктивное (вихревое) сопротивление, а величина подъемной силы уменьшается. Для крыла конечного размаха вводится понятие удлинения λ :

$$\lambda = \frac{L^2}{S}, \quad (2)$$

где L – поперечный размах крыла, S – его площадь. Для прямоугольного крыла удлинение – это просто отношение поперечного размаха крыла L к его хорде b [2]. В теории крыла конечного размаха получено, что для незакрученных эллиптических в плане крыльев большого удлинения ($\lambda > 5$)

$$C_y^\alpha = 2\pi \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-1}, \quad (3)$$

Следует отметить, что для эллиптического в плане крыла эллиптическими являются также и распределения по размаху циркуляции и, соответственно, подъемной силы. При этом индуктивная скорость на крыле оказывается постоянной, и равной половине таковой на бесконечности вниз по потоку [2]. Если имеются отличия индуктивной скорости от постоянного значения вследствие кривизны, изменения профилировки крыла по размаху или отличия формы крыла в плане от эллиптической, его подъемная сила несколько изменяется. Однако для типичного трапециевидного крыла, форма в плане которого является аппроксимацией прямыми образующими формы крыла эллиптического, при $\lambda \geq 5$ эти отличия практически отсутствуют [3].

Для стреловидного крыла в приближении крыла скользящего [2] (то есть при пренебрежении эффектов на его концах и на стыке с фюзеляжем)

$$C_y^\alpha = 2\pi \cos \chi \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-1}, \quad (4)$$

где χ – угол стреловидности по $1/4$ хорды крыла.

Для крыла малого удлинения ($\lambda \leq 1$) величина производной коэффициента подъемной силы составляет (Р. Т. Джонс, см. [2])

$$C_y^\alpha = \frac{\pi\lambda}{2} \quad (5)$$

В случае промежуточных удлинений крыла $1 < \lambda < 5$ Д. Кюхеманом построена интерполяционная формула для производной коэффициента подъемной силы, на границах совпадающая с исходными выражениями для прямого (не стреловидного) крыла и крыла малого удлинения. Видимо, нет необходимости приводить ее здесь. Достаточно упомянуть, что почти при всех промежуточных удлинениях крыла за исключением малой окрестности точки $\lambda = 2$ величина производной коэффициента подъемной силы составляет не менее 0.9 от минимума из двух значений, получаемых по формулам (3) и (5). При $\lambda = 2$, когда результаты расчета по формулам (3) и (5) совпадают, интерполяционное значение производной, прекрасно совпадающее с экспериментом, равно ~ 0.85 от того, что дает расчет по этим формулам [2].

Таким образом, оценка величины подъемной силы крыла конечного размаха в несжимаемой сплошной среде (потоке газа при числе Маха $M \ll 1$) может быть получена из выражения

$$Y = C_y q S, \quad (6)$$

где коэффициент подъемной силы C_y вследствие его линейности на рассматриваемых режимах определяется формулами (1), (3) – (5).

Конечно, такой летательный аппарат как самолет, отличается от отдельно рассматриваемого (как говорят аэродинамики, изолированного) крыла. Однако нетрудно показать, что эти простые выражения (1) –

(б) достаточно адекватно и с неплохой точностью описывают несущие характеристики такого сложного летающего объекта.

Для того чтобы подтвердить это утверждение, используя общеизвестные данные, рассмотрим крейсерский режим полета самолета. В этом случае его вес равен создаваемой им подъемной силе:

$$G = Y,$$

а полет самолетов с большой дальностью полета происходит, когда аэродинамическое качество

$$K = \frac{Y}{X} = \frac{C_y}{C_x},$$

где X – аэродинамическое сопротивление, как правило, очень близко к его максимальному значению K_{\max} . Коэффициент подъемной силы на этом режиме определяется как $C_{y \text{ опт}}$, и для заданной компоновки на заданном режиме обтекания имеет вполне определенное значение, которое определяется из баланса вязкой и индуктивной (то есть, вихревой при $M \leq M^* < 1$) компонент сопротивления и ее подъемной силы. В данном контексте критическое число Маха M^* – то число, при котором на обтекаемой поверхности впервые возникает локальная сверхзвуковая зона, что приводит к появлению нового вида сопротивления – волнового.

Известно, что поляра самолета (зависимость сопротивления от подъемной силы $C_x(C_y)$) на рассматриваемых режимах описывается квадратичной функцией [2, 4]. В первом приближении она может считаться симметричной относительно оси $Y = 0$ ($C_y = 0$), тогда:

$$C_x = C_{x0} + \frac{C_y^2}{A}, \quad (7)$$

где

$$A = \pi e \lambda \text{ при } M \leq M^* < 1, \quad (8)$$

C_{x0} – коэффициент сопротивления при нулевой подъемной силе, e – эмпирический фактор Освальда, учитывающий степень реализации подсосывающей силы на передней кромке крыла, а также отличия формы крыла самолета в плане от эллиптической, и наличие фюзеляжа и хвостового оперения, несколько снижающих подъемную силу. Первое слагаемое в формуле (7) – это сопротивление, вызываемое вязкостью, а второе – индуктивное сопротивление, являющееся платой за создание подъемной силы крылом конечного размаха.

В формуле (7) не учтена обычно существующая у многих самолетов асимметрия поляры относительно оси C_x , что приводит к тому, что эта формула может быть использована, по существу, только для прикидочных, оценок, которые и будут сделаны ниже.

Средняя величина фактора Освальда e у 4 выдающихся для своего времени самолетов массовых серий DC-3, B-17, B-24 и Cessna 172 равна $\frac{3}{4}$ [5] при использованной аппроксимации поляры (7). Первые полеты этих винтовых самолетов с прямым крылом были совершены за период с 1935 по 1955 годы. Средняя величина фактора e для 11 известных самолетов (Piper PA-28, Cessna 185, Bellanca Skyrocket II, Saab 340, Boeing 707, Learjet 25, DC-9, Gulfstream II, Boeing 767, Airbus A340 и C-17) как винтовых, так и реактивных, первые полеты которых приходятся на период 1958 – 1991 годов, составляет уже $\frac{4}{5}$ [6] (следует отметить, что приведенные в этом источнике ошибочные величины e были исправлены). Поэтому оценка $e = \frac{5}{6}$ в качестве граничного значения этого параметра, предложенная Д. Кюхеманом для современных компоновок [2], если считать поляры симметричными, кажется вполне оправданной.

Из выражений (7) – (8) следует, что

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{C_{x0}}}, \quad (9)$$

$$C_{y \text{ опт}} = \sqrt{A C_{x0}} \quad (10)$$

Тогда

$$C_{y \text{ opt}} = \frac{\pi e \lambda}{2K_{\text{max}}}, \quad (11)$$

а масса самолета на крейсерском режиме должна быть равна

$$m_{\text{cr}} \approx \frac{k C_{y \text{ opt}} \rho S}{g} \quad (12)$$

где g – ускорение земного притяжения, k – отношение значений коэффициента на крейсерском режиме к $C_{y \text{ opt}}$ (для таких самолетов как, например, Boeing 747, $k \approx 0.9$, см. [2]).

Проверим, насколько формулы (7) – (11) описывают характеристики такого самолета как Boeing 747-200F. Его крейсерское число Маха $M = 0.84$. Так как угол стреловидности передней кромки его крыла $\chi = 37.5^\circ$, число Маха по нормали к кромке $M_n = 0.67$. И практическое такое же оно по $1/4$ хорды крыла. Поэтому в первом приближении эффектом сжимаемости воздуха можно пренебречь (см., например, в источнике [7] зависимость $C_x(M)$ идентичной по геометрии модели самолета Boeing 747-100). Площадь крыла самолета $S = 511 \text{ м}^2$, размах $L = 60.0 \text{ м}$, и удлинение $\lambda = 7.0$ [8]. Известно значение максимального аэродинамического качества самолета Boeing 747 – $K_{\text{max}} = 17.7$ [6]. Тогда при $e = 5/6$ для него определяется значение $C_{y \text{ opt}} = 0.514$, и коэффициент сопротивления на этом режиме $C_x = 2C_{x0} = 2.90 \cdot 10^{-2}$. Вследствие того, что зависимость $K(C_y)$ имеет на этом режиме экстремум, с точностью до величин второго порядка малости

$$\Delta C_x = C_x \frac{\Delta C_y}{C_{y \text{ opt}}}$$

при

$$\Delta C_y = |C_y - C_{y \text{ opt}}| \ll C_{y \text{ opt}}$$

Отсюда легко получить, что при $C_y = 0.500$ коэффициент $C_x = 2.82 \cdot 10^{-2}$, что совпадает с данными летного эксперимента $C_x = 2.8 \cdot 10^{-2}$ (см. fig. 4 – 5 в источнике [7], $M = 0.84$). Таким образом, при $e = 5/6$ упрощенные формулы (7) – (11) хорошо описывают аэродинамические характеристики самолета Boeing 747, по крайней мере, на режимах полета в окрестности максимального аэродинамического качества.

Теперь проверим на соответствие реальности оценки по формуле (12). Примем среднюю высоту крейсерского полета $h = 9.5 \text{ км}$, тогда плотность воздуха ρ составит 0.439 кг/м^3 , а крейсерская скорость его полета при $M = 0.84$ – 253 м/с [9]. Скоростной напор q при этом будет равен 14.1 кПа , номинальная нагрузка на крыло $G_0/S = 7.25 \text{ кПа}$, а $C_{y \text{ opt}} = 0.514$. Расчет по формуле (12) при $k = 0.9$ [2] дает, что «равновесная» масса 747-200F на крейсерском режиме должна составлять 340 т , что очень близко к величине его средней полетной массы, составляющей около 330 т .

Следует отметить, что чем больше удлинение крыла λ , тем, при прочих равных условиях, выше максимальное аэродинамическое качество K_{max} . Поэтому при всей консервативности для определенного класса летательных аппаратов такого параметра как K_{max} , параметр $C_{y \text{ opt}}$ (см. (11)) должен быть, по крайней мере, не менее консервативным. Характерные значения K_{max} для дозвуковых реактивных лайнеров со стреловидными крыльями находится приблизительно в диапазоне 15 – 20 . Поэтому оценка $C_{y \text{ opt}} = 0.5 \pm 0.1$ – хорошая априорная оценка этого параметра для любого из них.

Из проведенных сравнений результатов расчетов по вихревой крыла конечного размаха следует, что при введении эмпирических поправочных коэффициентов, лежащих, как правило, в диапазоне значений от 0.75 до 0.9 , с помощью этих теорий можно получать простые формулы для расчета основных аэродинамических характеристик таких сложных летательных аппаратов как современный самолет. При этом, однако, стоит отметить данную Д. Кюхеманом оценку кратко описанной выше теории: «Классическая теория прямых крыльев большого удлинения... была основана на допущениях, в лучшем случае правдоподобных».

III. Винт в режиме висения

Висение – режим, когда несущий винт не перемещается относительно невозмущенной среды. При этом осесимметричный набегающий поток, создаваемый винтом, направлен вдоль его оси. Это сильно упрощает расчетную модель явления. В качестве первого приближения к описанию работы винта используется импульсная теория, разработанная еще в XIX веке У. Рэнкиным и Р. Фрудом (см. [10]). В импульсной теории сила тяги винта, создаваемая обтеканием его лопастей – вращающихся крыльев большого удлинения, распределяется по всему его диску. В соответствии с третьим законом Ньютона на поток воздуха

действует равная по величине и противоположная по направлению сила реакции, увеличивая скорость в следе за винтом и сообщая потоку кинетическую энергию. Затраты мощности на винте, необходимые для передачи этой энергии, называются индуктивной мощностью несущего винта и соответствуют индуктивному сопротивлению крыла конечного размаха [10].

Возможно построение лопастной вихревой теории несущего винта, когда обтекание каждой его лопасти рассчитывается как обтекание крыла (см. раздел II), движущегося в неоднородном потоке, который испытывает возмущения как от присоединенных вихрей, заменяющих все другие лопасти, так и от вихревой пелены, стекающей со всех лопастей винта, в том числе и той, обтекание которой рассчитывается. Эта вихревая теория винта, основы которой заложил Н. Е. Жуковский, связана уже с рассмотрением локальных, а не обобщенных характеристик обтекания. Она позволила уточнить влияние различных факторов, например, выявила концевой эффект на лопасти [10]. При сложных схемах вихревого следа возможны только численные, а, значит, частные решения для конкретных компоновок. Поэтому, рассмотрение подобных подходов выходит за рамки данной работы.

В импульсной теории несущий винт заменяется активным диском, то есть диском нулевой толщины, способным поддерживать на себе перепад давления в потоке, и, таким образом, ускорять его. Показано, что в этой схеме распределение нагрузок по диску эквивалентно распределению нагрузок на винте с бесконечным числом лопастей. При этом, как и на оптимальном эллиптическом крыле, индуктивные скорости на диске винта ровно вдвое меньше, чем в струе от винта на бесконечности вниз по потоку [10]. Вследствие неоднородности поля индуктивных скоростей, создаваемых реальным винтом с конечным числом лопастей действительные индуктивные затраты мощности на создание силы тяги будут больше того, что дает импульсная теория. Кроме того, к ним добавятся затраты, связанные с вязкостью. Поэтому оценки, получаемые с помощью импульсной теории позволяют найти нижнюю границу затрат мощности на несущем винте [10].

Импульсная теория прямо из законов сохранения расхода (массы), импульса и энергии дает выражения, связывающие основные параметры винта, создаваемую им силу тяги и затрачиваемую на нем индуктивную мощность [10]:

$$u_0 = \sqrt{\frac{T}{2\rho S_0}},$$

где u_0 – индуктивная скорость в плоскости винта, T – его тяга, S_0 – площадь несущего диска

$$S_0 = \frac{\pi D^2}{4},$$

где D – диаметр винта. При этом индуктивная скорость на бесконечности вниз по потоку $u_\infty = 2u_0$. Так как индуктивная мощность W_i равна

$$W_i = Tu_0 = \frac{Tu_\infty}{2},$$

то

$$T = 2^{\frac{1}{3}} (\rho S_0)^{\frac{1}{3}} W_i^{\frac{2}{3}} \quad (13)$$

На винте с конечным числом лопастей имеются потери на неоднородность потока, его закручивание, а также концевые потери, которые в сумме составляют порядка 10 % полной мощности винта [10]. Кроме того, существуют еще более значительные потери, связанные с вязкостью обтекающего лопасти винта газа. Поэтому, для учета всех этих потерь в формулу (13) вводится эмпирический коэффициент тяги $k < 1$, определяемый из сравнения расчетных и известных по данным производителей характеристик нескольких моделей вертолетов. Кроме того, формула (13) обобщается на случай одновременной работы нескольких одинаковых несущих винтов, мощность для привода которых делится на равные части. Легко видеть, что тогда общая их тяга T будет равна

$$T = 2^{\frac{1}{3}} k (\rho S_0)^{\frac{1}{3}} W^{\frac{2}{3}}, \quad (14)$$

где теперь S_0 – общая площадь несущих дисков всех винтов, W – полная мощность двигателя/двигателей для их привода. Так как тяга T в рассматриваемой ситуации равна подъемной силе Y , то масса вертолета m связана с мощностью его двигательной установки на режиме висения W :

$$m = \frac{2^{\frac{1}{3}} k (\rho S_0)^{\frac{1}{3}} W^{\frac{2}{3}}}{g} \quad (15)$$

Рассмотрим характеристики 5 российских и западных вертолетов для того, чтобы определить эмпирический коэффициент k . В таблице 1 представлены нормальная взлетная масса m_0 и основные геометрические параметры винтов вертолетов ряда вертолетов от самого тяжелого транспортного вертолета Ми-26 до легкого EC 120 Colibri [11 – 17]. Здесь N – число лопастей несущего винта (у Ка-226 два трехлопастных соосных винта), D – его диаметр, b – хорда его лопасти (все лопасти – прямоугольной формы в плане), S_0 – как и ранее площадь несущего диска винта (у Ка-226 – двух винтов вместе), λ – удлинение лопасти, $\delta = m_0 g / S_0$ – номинальная нагрузка на несущий диск, σ – коэффициент заполнения, то есть отношение площади всех лопастей в плане к площади несущего диска:

$$\sigma = \frac{2Nb}{\pi D}$$

Таблица 1

Вертолет	m_0 (т)	N	D (м)	b (м)	S_0 (м ²)	λ	$\sigma \cdot 10^{-2}$	δ (Па)
Ми-26	49.6	8	32.0	0.835	804	19.2	13.3	605
Ми-38	14.2	6	21.1	0.49	350	21.5	8.9	398
Bell 214ST	7.80	2	15.85	0.84	197	9.5	6.8	388
Ка-226	3.10	2×3	13.0	0.25	265	26.0	7.4	115
EC 120 Colibri	1.68	3	10.0	0.26	78.5	19.2	5.0	210

Нагрузка на несущий диск у всех вертолетов более чем на порядок ниже, чем у турбореактивных лайнеров (см. раздел II), однако если в качестве характерной площади использовать реальную площадь в плане винтов $S = S_0 / \sigma$, то уровень нагрузки одновинтовых вертолетов оказывается порядка 4 – 6 кПа. Это уже сопоставимо с нагрузкой на крыло самолета Boeing 747 и оказывается в 3.5 – 4.5 раза больше, чем нагрузка на крыло такого самолета как DC-3 [18], скорость полета которого, как и его масса, сопоставимы со скоростью полета и массой вертолетов.

Без привлечения конкретных данных о текущих параметрах полета, вертолет может находиться в достаточно ясно интерпретируемых режимах висения только в двух случаях: на статическом потолке и при аварийном прекращении взлета вследствие отказа одного из двигателей (для многодвигательных вертолетов). Среди рассматриваемых вертолетов 4 первых являются двухдвигательными машинами. На режиме прерванного взлета оставшийся у них работоспособным двигатель должен обеспечить висение вертолета вблизи земли при нормальной взлетной или несколько меньшей массе. Эту критическую массу на режиме взлета обозначим m^* . Наиболее трудно это условие выполнить у тяжелых вертолетов с большой нагрузкой на несущий диск. Поэтому, при нормальной взлетной массе вертолета Ми-26 $m_0 = 49.6$ т, режим висения у земли на одном двигателе у него может быть реализован только при массе $m^* = 40.0$ т – около 0.8 от m_0 [11]. Точных данных о массе m^* для вертолета Ми-38 нет, однако можно ожидать, что отношение ее к нормальной взлетной массе будет не слишком сильно отличается от подобного соотношения для вертолета Ми-26 того же конструкторского бюро. Из этого предположения и оценивается значение этой массы для Ми-38, приведенное в таблице 2. Для более легкого вертолета Bell 214ST было принято, что масса m^* составляет 0.9 от m_0 . Для еще более легкого вертолета Ка-226 с малой нагрузкой на несущий диск считается, что $m^* = m_0$. Одновинтовому вертолету EC 120 подобный режим недоступен – при отказе двигателя ему может помочь только авторотация несущего винта.

Таблица 2

Вертолет	Режим	H (км)	m^* (т)	$W^* \cdot 10^{-3}$ (кВт)	k
Ми-26	Взлет	0	40.0	7.54	0.81
Ми-38	Взлет	0	11.5	1.66	0.84
Bell 214ST	Взлет	0	7.02	1.14	0.80
Ка-226	Взлет	0	3.10	0.314	0.76
Ми-38	Потолок	3.10	12.7	2.35	0.82
Bell 214ST	Потолок	1.95	7.16	1.42	0.76
EC 120 Colibri	Потолок	3.35	1.52	0.208	0.82

У одновинтовых вертолетов рулевой винт в среднем потребляет 8 % общей мощности силовой установки [10]. Кроме того, имеются еще потери на редукторе, что в сумме с затратами на рулевой винт составляет около 10 %. Поэтому на режиме прерванного взлета в качестве расчетной мощности несущего винта для них принималась максимальная или, если она имеется, чрезвычайная мощность одного двигателя двухдвигательного вертолета, умноженная на коэффициент 0.90. Аэродинамические потери у вертолетов двухвинтовой продольной схемы вследствие интерференции винтов практически такие же – около 10 % [10]. При соосном расположении двух винтов как у Ка-226 должны исчезнуть потери на закручивание следа ~ 1 %. Имеется также некоторая положительная интерференция соосных винтов по сравнению с их продольным расположением. Поэтому было принято, что потери мощности здесь вдвое ниже, и максимальная мощность двигателя этого вертолета Allison 250-C20B была умножена на коэффициент 0.95. В результате по формуле (15) для четырех двухдвигательных вертолетов были получены эмпирические коэффициенты k снижения тяги несущего винта на режиме прерванного взлета по сравнению с тем, что получается из импульсной теории винта.

Оценки характеристик вертолетов на статическом потолке имеет свои особенности. Они были проведены для нормальной взлетной массы вертолетов за вычетом половины горючего. Снижение мощности турбовальных двигателей по высоте приблизительно определялось по уменьшению расхода воздуха через воздухозаборник. Как известно [19], массовый расход воздуха μ

$$\mu \sim \frac{p^*}{\sqrt{T^*}},$$

где p^* – давление торможения, T^* – температура торможения потока, которыми в данном случае являются соответствующие статические параметры атмосферы. Однако, у двухдвигательных вертолетов ограничивать мощность на винте на статическом потолке может не снижение мощности двигателей, а ограничение мощности на трансмиссии несущего винта. Например, максимальная мощность в длительном режиме трансмиссии вертолета Bell 214ST составляет только около 60 % от суммарной максимальной мощности двух его двигателей [14]. При небольшом статическом потоке данного вертолета именно это ограничение мощности оказывается определяющим.

У другого двухдвигательного вертолета – Ми-38 ограничения на мощность трансмиссии несущего винта неизвестны, а на потолке [20] мощность двигателей составляет, по оценке, около 65 % от мощности у земли, что, по крайней мере, сопоставимо с ограничениями у вертолета Bell 214ST. Поэтому считалось, что именно ограничение по мощности двигателей на статическом потолке оказывается определяющим для Ми-38. Имеющиеся данные по вертолетам Ми-26 и Ка-226 не позволяют определить ограничения мощности несущего винта на статическом потолке этих вертолетов. У одновинтового вертолета EC 120 Colibri ограничение по мощности на потолке очевидно. В результате по формуле (15) для трех вертолетов были получены значения эмпирического коэффициента k снижения тяги несущего винта по сравнению с идеализированной импульсной моделью течения на статическом потолке. Следует отметить, что эти коэффициенты у двух вертолетов, для которых были получены данные на обоих режимах, оказались весьма близки (см. таблицу 2), что подтверждает адекватность используемых подходов. Более того, несмотря на некоторую приближенность оценки характеристик вертолетов на обоих режимах висения за исключением данных по Ми-26, во всех 7 расчетных случаях значения коэффициента снижения тяги k по сравнению с идеализированными расчетными данными варьируются незначительно. Поэтому, можно считать, что этот коэффициент равен его среднему значению $k = 0.80 \pm 0.05$.

Таким образом, можно утверждать, что простейшая импульсная модель чрезвычайно сложного и неравномерного течения (впечатляющую картину такого течения можно увидеть на фотографии 75 в источнике [21]) при использовании фиксированного значения эмпирического коэффициента $k = 0.80$ дает хорошее согласование между расчетными и фактическими значениями основных параметров вертолетов в режиме висения. Вместе с данными из предыдущего раздела это позволяет надеяться, что подобного результата можно добиться при использовании аналогичных обобщенных методов и в оценках основных аэродинамических характеристик птиц и насекомых при их машущем полете. Полезно отметить также то, что для описания существенно более сложного течения, чем обтекание изолированного крыла, была успешно использована заметно более простая теория.

IV. Базовые модели для описания аэродинамики машущего крыла

Урок, который можно вынести из результатов разделов II, III, представляется следующим: даже теория, достаточно схематично описывающая сложное явление, может быть вполне адекватной, если она описывает основные черты этого явления. При этом влияние частных особенностей может быть «свернуто» с помощью эмпирических поправок. Таким образом, требуется подходящая «базовая модель» явления или набор таких

базовых моделей. Для профиля таковой моделью является присоединенный вихрь, для крыла конечного размаха – присоединенный вихрь и сходящая с него вихревая пелена (или при предельном упрощении – свободные вихри, уносимые потоком с концов крыла и образующие вместе с присоединенным вихрем вихрь П-образный). Для несущего винта базовой моделью является струя от винта с бесконечным числом лопастей, параметры которой определяются законами сохранения и в плоскости винта не изменяются. Все неоднородности потока, создаваемые лопастями, оказывают на основные аэродинамические характеристики хорошо спроектированного винта по существу второстепенное и, в целом, в первом приближении относительно легко учитываемое влияние. Следует также отметить, что для «здоровых» в смысле Прандтля–Кюхемана течений то же относится и к влиянию вязкости на аэродинамические характеристики – его, конечно, нельзя не учитывать вообще, но непосредственно из базовой модели можно исключить. В случае «здоровых течений» и при достаточно больших числах Рейнольдса Re вязкость проявляется только в тонком пограничном слое, непосредственно прилегающем к поверхности тела, и практически не влияет на течение в целом. Характерная толщина пограничного слоя при этом составляет не более $Re^{-0.5}$ от масштаба течения.

Достаточно ясно, что длительная эволюция живых существ, склонных к полету, должна привести к тому, что используемые ими режимы течения также как и режимы современных летательных аппаратов в целом являются «здоровыми». Однако смысл этого понятия, хотя бы вследствие неизбежной нестационарности обтекания, может быть несколько иным, чем для технических объектов. Исключения возможны у летающих существ совсем малого масштаба, которым для поддержания своего тела в воздухе не требуется больших усилий. Поэтому априорно в базовую модель машущего полета вязкость воздуха не входит. Теперь более внимательно рассмотрим движение машущего крыла. По крайней мере, у птиц наглядно видно, что это – гребок, создающий нестационарное движение окружающей крыло сплошной среды. Численные расчеты колебаний профиля машущего крыла в приложении к полету насекомых также проводятся для движений такого рода, см., например, рис. 1 [22].

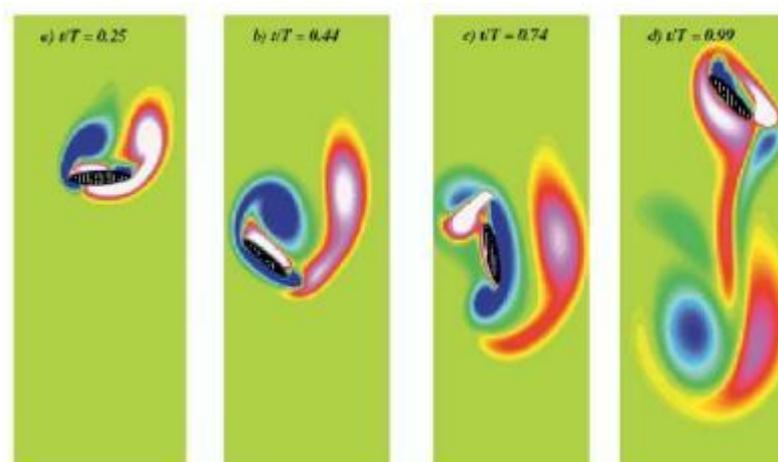


Рис. 1

Из рис. 1, а также наблюдений полета крупных птиц, следует, что при махе крыла вниз оно из вертикального положения в момент максимального подъема крыла одновременно с его опусканием разворачивается в горизонтальное положение, которое достигается, по крайней мере, в момент, соответствующий $1/4$ периода колебаний. При дальнейшем движении вниз крыло снова разворачивается в вертикальное положение в окрестности максимального отклонения вниз, и, примерно, полпериода в таком положении движется вверх, начиная в окрестности максимума отклонения разворачиваться в горизонтальное положение. Затем маховый цикл повторяется.

Таким образом, рассматривая описанное движение, можно сделать вывод, что в отличие от крыльев самолетов, подъемная сила машущего крыла в основном создается вследствие движения крыла вниз плашмя или в близком к этому положении. При этом его движение вверх происходит с минимальным воздействием на окружающую среду, так как профиль крыла расположен практически по направлению его движения. Возникает вопрос, какие из существующих теоретических гидродинамических моделей или их комбинаций могут быть базовыми для данного существенно нестационарного движения? Уже из этого простейшего анализа следует, что классическая стационарная вихревая теория крыла не подходит для описания характеристик крыла машущего.

Для описания полета голубя *Columba Livia* в часто цитируемой статье [23] использовалась упомянутая в предыдущем разделе данной работы импульсная теория винта. Однако ее применение для машущего полета

также представляется явной натяжкой. В отличие от винта крылья птиц движутся, в основном, в вертикальном направлении, ометая сравнительно малую часть круга, построенного по максимальному размаху крыльев. Кроме того, как уже говорилось выше, подъемная сила создается при гребковых движениях машущего крыла, что соответствует совершенно иным режимам обтекания, чем те, которые реализуются на лопастях винта, движущихся при малых углах атаки. То есть выбранная в статье [23] базовая модель к реальным движениям крыльев птицы не имеет никакого отношения. К тому же, импульсная теория связывает создаваемую в полете подъемную силу и затрачиваемую для этого мощность, а последняя величина у живых существ в полете напрямую не измерялась. Поэтому продуктивная теория машущего полета должна связывать подъемную силу с другими, измеримыми характеристиками птиц или насекомых.

После анализа имеющейся информации в качестве базовых моделей для описания аэродинамики машущего крыла были выбраны модели, описываемые аналитическими теориями гидравлического удара Жуковского и вихревых дорожек Кармана. Ценность вихревой теории крыла и импульсной теории винта для оценки характеристик машущего крыла заключается в основном в том, что они дают классические образцы создания простых моделей сложных явлений путем отбрасывания всего того, что не является необходимым для их описания. Кроме того, эти теории дают представление об уровне влияния на результат факторов, неучтенных в базовой модели.

V. Теория гидравлического удара

Теория гидравлического удара была разработана Н. Е. Жуковским на рубеже XIX и XX веков (см. [24]). Она описывает, что происходит, когда на пути текущей со скоростью v жидкости в трубе внезапно возникает преграда, или когда движущаяся со скоростью потока преграда вдруг резко останавливается. В этом случае, если труба недеформируема, скорость роста массы потока m , заторможенного до нулевой скорости, равна

$$\frac{dm}{dt} = \rho S c,$$

где ρ – плотность жидкости, S – площадь трубы, c – скорость малых возмущений (звука) в жидкости. Умножив эту величину на $\Delta v = v$ и поделив на площадь S , получим изменение импульса потока на единицу площади поперечного сечения трубы, равное увеличению давления на преграду Δp

$$\Delta p = \rho v c \quad (16)$$

Таким образом, из второго и третьего законов Ньютона прямо следует очень простая по структуре формула (16), описывающая рост давления при гидравлическом ударе. Несмотря на предельную простоту математической модели явления, решение этой задачи спасло первый московский водопровод современного типа чуть ли не от закрытия [25]. При скорости потока воды ~ 5 м/с и скорости звука в воде ~ 1500 м/с максимальное давление на применявшихся там поворотных заслонках $p_{\max} \approx \Delta p$ могло достигать величины, близкой к 7.5 МПа (в реальности несколько меньше вследствие упругости водопроводных труб), чего с избытком хватало для их разрушения.

Если систему координат связать с машущим крылом, то при взмахе вниз поток воздуха тормозится относительно его нижней поверхности аналогично тому, как это происходит на заслонке, создавая зону сжатия. В стационарных течениях несжимаемой среды, как следует из интеграла Бернулли, при полном торможении потока, движущегося со скоростью v , возникает перепад давления Δp , равный скоростному напору q :

$$\Delta p = q = \frac{\rho v^2}{2}, \quad (17)$$

где v – скорость движения потока на бесконечности, а q – его скоростной напор. Сопоставляя выражения (16) и (17), естественно считать, что при установлении аналогий между стационарными и нестационарными течениями интересующего нас ударного типа комплексы $\frac{1}{2} \rho v^2$ и $\rho v c$ можно считать эквивалентными.

Как известно, плотность воздуха на 3 порядка ниже плотности воды, а скорость звука в нем ниже, примерно, в 5 раз. Кроме того, характерная скорость движения крыльев птиц и насекомых порядка 2 м/с. Поэтому максимальные отклонения давления на нижней поверхности машущего крыла от давления невозмущенной среды могут быть не более 1 кПа. Это на порядок с лишним ниже нагрузки на крыло у околосубзвуковых реактивных лайнеров (см. раздел II) и соизмеримо с нагрузкой на несущий диск у вертолетов (см. раздел III).

VI. Вихревые дорожки Кармана и отрывы

За препятствиями плохо обтекаемой формы в стационарном потоке жидкости образуется система из двух рядов вихрей, расположенных в шахматном порядке, см. фотографии 94 – 96 в источнике [21]. Эта система вихрей, называемая дорожкой Кармана, «почти устойчива», и возможно ее аналитическое описание [26]. При этом коэффициент сопротивления препятствия оказывается равным

$$C_x \sim \frac{h}{d}, \quad (18)$$

где h – расстояние между рядами вихрей, d – ширина препятствия. Если в качестве препятствия используется плоская пластинка, расположенная поперек потока жидкости, для нее $h/d = 1.57$, а коэффициент сопротивления $C_x = 1.61$, что неплохо согласуется с экспериментальными данными [26].

Если пластинка внезапно начинает движение, то за время, пока она проходит расстояние, соизмеримое с ее шириной, с ее боковых кромок успевают сорваться только 2 вихря, см. фотографии 63, 64 и 81 [21]. При этом среднее расстояние между центрами вихрей по 8 изображениям составляет 0.94 от ширины пластинки ($h/d = 0.94$). Так как основное влияние на сопротивление оказывают ближайшие вихри, то коэффициент сопротивления пластинки при таком вихревом отрыве с помощью формулы (18) можно оценить величиной $C_x \approx 0.96$.

С боковых кромок пластинки происходят отрывы потока либо в виде вихрей, либо с образованием границы области отрыва на ее верхней поверхности. На стационарном режиме при больших числах Рейнольдса такое течение всегда происходит с образованием области отрыва [27]. В целом, зона отрыва также «заполнена вихревыми движениями» более мелкого масштаба [26], так что, зачастую, струйное решение может быть достаточно адекватным для интегральной оценки аэродинамических сил даже течений с явно выраженными вихрями. Так, из решения Кирхгофа для струйных отрывных течений [26], когда зона стационарного отрыва уходит от пластинки, расположенной нормально к набегающему потоку, на бесконечность, следует, что

$$C_x = \frac{2\pi}{4 + \pi} \quad (19)$$

Из формулы (19) получается, что $C_x = 0.88$, и различие в коэффициентах сопротивления пластинки по классическим вихревым и струйным отрывным теориям оказывается не более 10 %. Так что теория струйных отрывных течений также дает достаточно адекватные оценки сил, действующих на тело в потоке с парой сорвавшихся вихрей. Однако в реальности, отрывные зоны даже в стационарных течениях оказываются не бесконечными и нестационарными, а силы, действующие на тела с присоединенными к ним отрывными зонами, бывают в несколько раз меньше, чем по теории струйных отрывных течений [27].

VII. Машущее крыло в режиме висения

Применим теперь рассмотренные теоретические модели течений для описания обтекания машущего крыла. Как и в случае несущего винта, для простоты будем рассматривать только режим висения. Насколько известно, птицы, кроме колибри, не могут совершать такой полет, а многие хорошие летуны не могут даже приблизиться к нему. Однако, максимальное аэродинамическое качество K_{\max} таких птиц по одним данным (источник [28]) равно, примерно, 6 у голубя, а по другим данным (источник [29]) изменяется от 10 (чайка) до 12 (крачка) и даже до 20 (альбатрос). Это означает, что для горизонтального перемещения такие птицы используют не более 10 – 15 % от создаваемой ими аэродинамической силы. Поэтому различие между суммарной аэродинамической и подъемной силами находится в пределах 1 %, и отличием между ними в первом приближении можно пренебречь.

Вследствие того, что машущее крыло движется в безграничном пространстве, а не внутри цилиндрических стенок как это происходит с преградой в трубе, обтекание крыла является трехмерным, в отличие от одномерного течения при гидравлическом ударе. На нижней поверхности машущего крыла поток полностью заторможен в одной точке, для которой только и может быть справедлива формула (16). Давления на поверхности крыла переменны, и для оценки суммарной силы должны быть использованы дополнительные предположения.

Как принято в аэродинамике самолета, будем считать, что крыло состоит из двух полукрыльев. В отличие от самолетов суммарный размах крыльев L определяется здесь по очевидным основаниям за вычетом ширины тела, то есть расстояния между осями поворота полукрыльев. Рассмотрим обтекание

профиля – поперечного сечения машущего крыла и определим его погонную аэродинамическую силу R , нормальную продольной оси полукрыла, следующим образом:

$$R = C_R \rho v c b, \quad (20)$$

где b – как и ранее, хорда профиля, C_R – коэффициент силы R . Достаточно адекватной моделью движения такого машущего крыла, следующей из качественного описания этого процесса в разделе IV, являются циклические вращательные колебания (махи) каждого полукрыла относительно своих осей вращения, которые расположены на внутренних боковых кромках полукрыльев. При этом плоскость каждого полукрыла совершает при махе вниз синусоидальный разворот относительно своей продольной оси, и направлена строго вертикально при махе вверх для минимизации потерь подъемной силы «на обратном ходу». Тогда

$$v = \omega r,$$

где ω – угловая скорость вращения полукрыла в момент маха, r – расстояние от рассматриваемой точки полукрыла до оси вращения.

Предполагается, что распределение давления в каждом продольном сечении крыла определяется с помощью формулы (20), а подъемная сила крыла есть результат интегрирования вдоль него по всем поперечным сечениям. Оценим этот интеграл для эллиптического в плане крыла, так как форма крыльев рассмотренных далее птиц (да и майского жука) достаточно близка к таковой. Тогда при размахе крыльев птицы или насекомого L , модуль вектора аэродинамической силы крыла, состоящего из двух полукрыльев, при всех высказанных ранее предположениях, и с учетом того, что подъемная сила создается только за половину периода, составит в среднем за мах

$$R = \frac{1}{2} \beta \rho \omega c \left[2 \int_0^{L/2} b(r) r dr \right] \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} C_R(\psi) d\psi \right], \quad (21)$$

где β – коэффициент, учитывающий влияния продольного взаимодействия сечений крыла и определяемый ниже, $b(r)$ – текущая хорда крыла, ψ – угол разворота сечения каждого полукрыла относительно его продольной оси, $\psi = 0$, когда сечение развернуто вертикально. Вращение полукрыла относительно продольной оси в первом приближении оказывает противоположное влияние на первой и второй половинах полупериода маха при движении крыла вниз, и, вследствие этого, им в оценках пренебрегается.

В используемой системе координат, связанной с полукрылом, среда находится в линейном поле центробежных сил. Известно, что, когда на жидкость, расположенную в тонкой прямой трубке на отрезке от 0 до $\frac{1}{2} L$, вдоль нее действует сила, пропорциональная расстоянию от точки $r = 0$, распределение давления p в трубке оказывается следующим [26]:

$$p \sim r \left(\frac{L}{2} - r \right)$$

В этом случае среднее по длине давление p составит $\frac{2}{3}$ от максимального, которое достигается в окрестности точки, где жидкость неподвижна. Из этого следует, что разумная оценка коэффициента, учитывающего влияния продольного взаимодействия сечений машущего крыла, – $\beta = \frac{2}{3}$.

Первый из интегралов формулы (21) – интеграл по полуразмаху для эллиптического крыла равен

$$I_L = \int_0^{L/2} b(r) r dr = \frac{2b}{L} \int_0^{L/2} \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - r^2} r dr = \frac{bL^2}{12} \quad (22)$$

Так как при движении крыла при махе вниз над ним возникают 2 вихря (см. рис. 1), для определения коэффициента подъемной силы сечения применим результаты теории вихревого отрывного течения. При таком режиме обтекания сечение профиля можно считать плоской пластинкой. Поэтому, для оценки примем, что коэффициент нормальной силы сечения, в котором находится точка торможения, $C_R = \xi = 0.96$. Тогда, вследствие синусоидального поворота сечения каждого полукрыла, оценка коэффициента его подъемной силы при угле поворота ψ приводит к выражению

$$C_R(\psi) = \xi \sin \psi$$

Интегрируя по углу ψ можно получить оценку коэффициента C_R крыла за взмах в целом. Однако обтекание пластины, наклоненной к вектору скорости, должно отличаться от рассмотренного выше случая обтекания пластины, нормальной к нему. Используя близость вихревого и отрывного струйного обтеканий, применим для оценки влияния угла ψ на подъемную силу пластинки при вихревом обтекании соотношения, полученные в рамках струйной теории.

Для наклонной пластинки формула Кирхгофа (19) обобщается на формулу Релея [26] (теперь вследствие того, что колебания крыла происходят в вертикальной плоскости, заменим коэффициент C_x на C_R):

$$C_R(\psi) = \frac{2\pi \sin \psi}{4 + \pi \sin \psi} \quad (23)$$

Тогда отношение интегралов по углу разворота крыла, вычисленных по формулам Релея I_R и Кирхгофа I_K , составит величину η :

$$I_R = \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi \sin \psi}{4 + \pi \sin \psi} d\psi = \frac{2\pi}{(4 + \pi)\eta} \int_0^{\pi/2} \sin \psi d\psi = \frac{I_K}{\eta}, \quad (24)$$

где из численных расчетов следует, что $\eta = 0.90$ с погрешностью ниже, чем 10^{-3} . Вследствие этого оценка величины второго интеграла по полупериоду из формулы (21) будет равна

$$I_\psi = \frac{2\xi}{\pi\eta} \quad (25)$$

Из визуальных наблюдений полета серых ворон следует, что при очень медленном спокойном полете максимальные углы отклонения их крыла от горизонтальной плоскости φ составляют, примерно, $\pm 30^\circ$. Тогда отношение средней за взмах проекции Y^t теоретического оценочного значения аэродинамической силы на вертикальную плоскость к ее модулю R из-за маховых движений составит величину

$$\frac{Y^t}{R} = \frac{1}{\varphi_{\max}} \int_0^{\varphi_{\max}} \cos \varphi d\varphi,$$

и при $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{Y^t}{R} = \frac{3}{\pi} \quad (26)$$

Для описанного выше колебательного движения при этих максимальных углах отклонения полукрыльев, связь угловых параметров оказывается следующей:

$$\omega = \frac{2\pi n}{3}, \quad (27)$$

где n – частота взмахов крыла. В рамках рассмотренной теоретической модели из выражений (20) – (27) с учетом того, что для эллиптического крыла

$$S = \frac{\pi bL}{4}, \quad (28)$$

следует, что величина подъемной силы машущего крыла на рассмотренном режиме равна

$$Y^t = \frac{8\xi\rho cL S n}{9\pi^2\eta} \quad (29)$$

Также как и в разделе III введем эмпирический коэффициент подъемной силы $k < 1$, определяемый из сравнения данных расчетных и известных из описаний нескольких летунов. Вследствие этого заменим формулу (29) на формулу (30):

$$Y = \frac{8k\xi\rho cL S n}{9\pi^2\eta} \quad (30)$$

где Y – скорректированное по эмпирическим данным значение средней по времени подъемной силы машущего крыла.

Тогда в режиме висения масса птицы или насекомого равна

$$m = \frac{8k\xi\rho cL n}{9\pi^2 g \eta}$$

Вследствие того, что полеты этих существ происходят обычно над землей на малой высоте, то для обычных обитателей земных равнин можно считать, что $\rho \approx 1.2 \text{ кг/м}^3$, $c \approx 340 \text{ м/с}$ [9], $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ и

$$m = \frac{kL n}{\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{9\pi^2 g \eta}{8\xi\rho c} \approx 0.25 \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}}$$

Тогда значения эмпирического коэффициента k могут быть определены из описаний птиц и/или насекомых по формуле

$$k = 0.25 \frac{m}{L n} \quad (31)$$

Теперь легко определить необходимую для висения мощность W , равную интегралу по поверхности крыла от произведения локальной аэродинамической силы dR на скорость потока, совпадающую со скоростью движения крыла:

$$dW = dRv = C_R \rho v^2 cb$$

Тогда из формул, аналогичных выражениям (21) – (25) и (27) – (28), следует, что

$$W = Y v^*,$$

где v^* – характерная скорость эллиптического крыла, равная

$$v^* = \frac{\pi^3 L n}{48k}$$

Таким образом, на режиме висения

$$W = \frac{\pi^3 Y L n}{48k} \quad (32)$$

и, при $Y = mg$, мощность, необходимая для висения равна:

$$W = \frac{\pi^3 mg L n}{48k}$$

Можно отметить, что характерная скорость v^* связана со скоростью маха среднего сечения эллиптического крыла $\langle v \rangle$ соотношением

$$v^* = \frac{\pi^2}{8k} \langle v \rangle,$$

где

$$\langle v \rangle = \frac{L\omega}{4} = \frac{\pi L n}{6}$$

При этом, как и в случае несущего винта предполагается, что часть мощности, рассеиваемая в окружающей среде без создания подъемной силы, также определяется величиной эмпирического коэффициента k . Его значения необходимо определить из имеющихся данных по массе, размерам и частоте взмахов крыла птиц и насекомых. Если эта величина не слишком сильно отличается от полученной ранее в

разделе III величины аналогичного коэффициента для несущего винта, то возникнут все основания полагать, что построенная в данном разделе теория машущего крыла на режиме висения достаточно адекватна.

VIII. Сравнение расчетных характеристик машущего крыла с эмпирическими данными

Имеющиеся данные по некоторым птицам и насекомым были использованы для получения оценки эмпирического коэффициента k по формуле (31). Для живых существ всегда существует определенный разброс размеров и массы тела, поэтому, если в источниках информации имелись только обобщенные характеристики рода, то для определенности оценки использовался крайний (наибольший или наименьший) набор параметров. Сами летающие существа выбирались, чтобы охватить максимально возможный диапазон параметров – от самых больших до самых маленьких. Площади их крыльев определялись по фотографиям и известным характерным размерам, таким, как длина тела и/или размах крыльев с учетом ракурсов, под которыми были получены фотоизображения. Однако точность определения площади крыла вряд ли была существенно выше, чем 10 %. Для оценки летных характеристик голубей использовались более определенные и конкретные данные [23, 28], при этом размах и площадь крыла голубя были скорректированы вследствие вычета ширины его тела, в соответствии с положениями, сформулированными в разделе VII этой работы.

В первую очередь были рассмотрены: серая ворона (*Corvus cornix*) (см. [30, 31]), голубь (*Columba Livia*) (см. [23, 28]), майский жук (*Melolontha*) (см. [32, 33]) и красная колибри (*Phaethornis ruber*) (см. [34, 35]). Необходимые для анализа данные этих летунов приведены в таблице 3. Обозначения параметров в таблице те же, что и ранее. Параметр δ в таблице 3 – нагрузка на крыло.

Таблица 3

Птица/насекомое	m (кг)	L (м)	S (м ²)	n (с ⁻¹)	δ (Па)	k	v^* (м/с)	W (Вт)
Серая ворона	0.74	0.70	0.11	3.0	66	0.80	1.7	12
Голубь	0.39	0.50	$5.0 \cdot 10^{-2}$	5.25	77	0.74	2.1	8.1
Майский жук	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	45	80	0.82	2.0	$5.9 \cdot 10^{-2}$
Колибри	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	50	71	0.83	1.8	$3.5 \cdot 10^{-2}$
Андский кондор	15	2.9	1.4	1.0	105	0.92	2.3	340

Среднее значение эмпирического коэффициента k по оценке характеристик этих четырех летунов с учетом точности исходных данных составляет $k = 0.80 \pm 0.10$ при изменении массы тела в 370 раз от 2 до 740 граммов. Из этих результатов следует также, что надкрылья у майского жука слабо влияют на его подъемную силу. Характерная скорость v^* и потребная для полета мощность W рассчитаны именно для этого среднего значения параметра k . Можно отметить, что нагрузка на крыло при этом у них отличается от среднего значения не более чем на ± 10 %. Имеется корреляция представленных в таблице 3 нагрузки на крыло δ и характерной скорости v^* – чем выше нагрузка, тем больше скорость.

Несколько сложнее ситуация с андским кондором (*Vultur*) (см. [36 – 39]) – крупнейшей летающей птицей на Земле. Известно, что он обычно гнездится на высоте 3 – 5 километров [37], где плотность воздуха в 1.3 – 1.7 меньше, чем на уровне моря, так что его, вообще говоря, нельзя отнести к «обычным обитателям земных равнин» (см. раздел VII). Однако сообщается также, что он «встречается и на равнинах юга Патагонии на западных морских побережьях» [36]. При этом утверждается, что у кондора «самые редкие взмахи крыльев во время настоящего полета по прямой – один взмах в секунду» [38], однако не оговаривается в каких условиях. Кроме того, очевидно, что и точность этого параметра по данным источника [38] не слишком высока.

Из разумных соображений естественно было предположить, что минимальное число взмахов в полете у кондора было зафиксировано именно на приморской равнине. Тогда в этих оценках он может быть приравнен к обитателям равнин. Поэтому для получения соответствующего характеристикам кондора коэффициента k можно использовать формулу (31). Его значение для кондора оказывается самым высоким, и на 15 % больше среднего для первых четырех рассмотренных выше летунов. Это означает, что при среднем значении $k = 0.80$ кондору не хватит около 15 % подъемной силы для достижения равновесия в воздухе на режиме висения и при наборе параметров, представленном в таблице 3. Возможно, что в реальности минимальная частота взмахов его крыла оказывается $1.1 - 1.2 \text{ с}^{-1}$ – тогда бы не было этого различия в летных характеристиках. Однако, более вероятно, что эти расхождения данных подтверждают устоявшееся мнение, что вследствие больших размеров и массы у кондора – наименьший избыток располагаемой мощности над минимальной потребной мощностью [23], вследствие чего он не может взлетать с ровного места, но только со скального уступа, а значит, не может даже в принципе поддерживать

режим висения. Ему для этого не хватает мощности. А прямолинейный полет на оптимальной скорости требует несколько меньшей мощности, чем режим взлета или висения [23], и кондору доступен.

Таким образом, оценка летных характеристик андского кондора через режим висения требует введения дополнительной поправки, так же как это имело место для тяжелого вертолета Ми-26 на режиме взлета с отказом одного двигателя (см. раздел III). Там это было сделано через введение критической массы m^* . Для Ми-26 отношение критической массы к стартовой $m^*/m_0 = 0.8$, то есть ему на этом режиме не хватает 20 % тяги по сравнению с примерно 15 % у кондора. Налицо некоторое подобие ситуации с летными характеристиками, как птиц, так и вертолетов различных «номинальных стартовых масс».

IX. Истинный парадокс шмеля

Рассмотрим теперь характеристики шмелей-кукушек (*Psithyrus*), так как по ним имеются достаточно подробные данные. Хотя, по мнению биологов, они – не настоящие шмели (*Bombus*), но их размеры, формы, масса, частоты колебаний крыла такие же, как шмелей настоящих. Отличаются от настоящих шмелей они только тем, что не имеют пыльцесобирающих корзиночек на задних ножках, а также своим паразитическим поведением [40]. Параметры шмелей, необходимые для оценки летных характеристик, представлены во второй строке таблицы 4 (см. также [41]).

Таблица 4

Насекомое/аппарат	m (кг)	L (м)	S (м ²)	n (с ⁻¹)	δ (Па)	k
Шмель	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	200	38	0.19
Флайер	$0.60 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$0.40 \cdot 10^{-4}$	120	7	$0.17 - 0.19^*$

* – вес не равен подъемной силе.

При меньшей в 4 раза массе по сравнению с самой маленькой колибри, а также при соответствующем уменьшении произведения LS , частота колебаний его крыла выше, чем у колибри в 4 раза. Соответственно эмпирический коэффициент k уменьшился примерно в 4 раза – с 0.8 примерно до 0.2. Это означает, что формула (31) не дает адекватных оценок для несущих характеристик шмеля, а также то, что они в 4 раза ниже, чем у рассмотренных ранее летунов. Шмель летает в 4 раза хуже, чем мог бы в принципе. Почему?

Известно, что такие летуны, как птицы, или летучие мыши, на самом деле машут своими крыльями существенно более сложным образом, чем это было представлено в разделе VII данной работы при формулировании расчетной модели. Их крылья волнообразно изгибаются и закручиваются, у птиц при махе работают даже отдельные маховые перья, см. например, фотографию серой вороны на взлете [31] (рис. 2). Эти, выработанные в процессе эволюции оптимальные движения, как можно заключить из всего предшествующего анализа, позволяют избегать отрывов с зонами хаотических (турбулентных) движений жидкости на машущих поверхностях, которые как показывают многочисленные трубные эксперименты на простых телах [27], в отличие от теоретических отрывных зон бесконечной длины по Кирхгофу [26], приводят к падению аэродинамических сил обычно в несколько раз. Возникновение подобных явлений на крыле самолета или винте вертолета приводит, как правило, к катастрофе.



Рис. 2

По иному обстоит дело с обтеканием крыльев шмелей. Они не могут изменять форму крыла, при взмахе крыло работает как плоская пластинка (см. [42]) – именно так, как это предполагается в математической модели, представленной в данной работе. Видимо, это связано с сильными ограничениями возможностей его системы управления полетом, то есть нервной системы. Вязкость грубо и зримо вторгается в глобальное обтекание машущего крыла, и при этом, очевидно, возникают отрывные зоны, резко ухудшающие несущие характеристики. Обтекание крыла шмеля уже трудно назвать «здоровым» в смысле Прандтля–Кюхемана. Шмели компенсируют эти явления многократным увеличением частоты колебаний крыла [42]. Вследствие их эволюционной адаптации, это не приводит к катастрофе, а только к увеличению энергозатрат, требуемых для полета. Видимо, при таких малых размерах и массе машущий полет настолько эффективен, что шмели, и, возможно, многие другие малые насекомые, могут позволить себе такие потери при его реализации – «*Quad licet Bombus, non licet Vultur!*».

Таким образом, подъемная сила у шмеля могла бы быть настолько большой, что в реальности он использует для полета только ее малую часть. При этом его полукрылья движутся примерно так же, как это предполагается в простой математической модели, представленной в этой работе, но при этом модель не может описать несущие характеристики крыла шмеля. В то же время, существенно более сложные в деталях движения крыльев, с помощью которых более крупные летуны ограничивают влияние вязкости на глобальное обтекание крыла, приводят к тому, что их несущие характеристики достаточно адекватно описываются данной математической моделью. Это и есть истинный, а не выдуманный, парадокс шмеля.

Дополнительным фактором, влияющим на обтекание крыльев насекомых размером со шмелей и менее, является то, что их характерные размеры начинают приближаться к предельно возможным размерам невязких структур течения. Известно, что минимальный диаметр вихря или, что то же самое, внутренний масштаб турбулентности «в земной атмосфере примерно равен или больше 1 мм» [43]. При меньших размерах диссипация энергии в вихре вследствие вязкости становится настолько велика, что подобные структуры уже не могут существовать. Поперечные хорды крыльев таких насекомых как муха превышают этот минимальный диаметр вихря всего лишь примерно на полпорядка. Это может привести к тому, что даже при оптимальном изменении формы крыла во время маха, описанные в разделах V и VI теории невязких течений, не могут адекватно описывать такие течения.

В 2007 году впервые было создано техническое устройство размером с муху, способное подниматься в воздух [44]. При этом энергия к нему подавалась с земли, система управления отсутствовала, и, поэтому, оно поднималось по специальным вертикальным направляющим. Основные технические характеристики этого устройства, представляющие интерес с точки зрения рассматриваемого вопроса, представлены в таблице 4 в строке «флайер». В источнике [44] сообщалось, что флайер «может создавать тягу примерно в 2 раза больше, чем его вес». Если в формулу (31) подставить удвоенную массу флайера, эмпирический коэффициент k для него оказывается равным 0.19. При уменьшении подъемной силы на 10 % $k \approx 0.17$. Таким образом, величина этого параметра, должного учитывать как применимость теорий, использованных при выведении формулы (31), так и уровень потерь при создании подъемной силы, у флайера – технического устройства, использующего примерно такие же движения машущего крыла, какие использует

и шмель, так вот эта величина практически такая же, как и у шмеля (см. таблицу 4). При этом масса флайера на порядок меньше массы шмеля, хорда крыла, – примерно, в 2 раза меньше. Таким образом, можно полагать, что основная причина снижения подъемной силы у этих объектов, видимо, еще не связана с приближением их размеров к предельным характерным размерам невязких течений, а вызвана, в основном, потерями вследствие неизменности формы крыла при махе.

Остается количественно подтвердить вывод о наивысшей эффективности машущего полета при масштабах летающего объекта малых, но превышающих внутренний масштаб турбулентности, полученный из качественного анализа летных характеристик шмеля.

Х. Сравнение энергетической эффективности создания подъемной силы винтом и машущим крылом

Для того, чтобы сопоставить затраты на создание подъемной силы несущим винтом и машущим крылом можно было бы использовать выражения (14) и (32) (известно, что неподвижное крыло обеспечивает большую эффективность, чем несущий винт). Так как зависимость подъемной для машущего крыла линейна по мощности, а тяга винта (которая в рассматриваемой ситуации равна подъемной силе) является степенной функцией с показателем $\frac{2}{3}$, в пространстве параметров имеются области, в которых энергетические преимущества может иметь как тот, так и иной способ создания подъемной силы. Однако, в обе формулы входят 3 дополнительных конструктивных параметра (S_0 , L и n), которые также оказывают влияние на результаты сравнения, а проводить анализ следует на оптимальных или близких к ним наборах конструктивных параметров. Предположим, что как конструкторы, так и природа в результате процессов эволюции, создавали объекты именно с такими наборами параметров. Надо только выбрать из них наиболее стабильные комплексы и экстраполировать или интерполировать их на границу, разделяющую области превосходства в энергетической эффективности рассматриваемых способов полета.

Для вертолетных винтов наиболее консервативным конструктивным параметром представляется нагрузка на несущий диск δ , см. таблицу 1. Для одновинтовых вертолетов, которые только и рассматриваются здесь, уменьшение номинальной стартовой массы в 29.5 раз от 49.6 т (Ми-26) до 1.68 т (ЕС 120) приводит к снижению параметра δ только в 2.9 раза. Из этого условия выводится, что

$$\delta \approx \nu Y^{\frac{3}{10}}, \quad (33)$$

где $\nu = 11.4 \text{ Н}^{0.7}/\text{м}^2$. Тогда из формулы (14) следует, что для несущего винта при условии (33)

$$Y = k^{1.30} \left(\frac{2\rho}{\nu} \right)^{0.435} W^{0.870} \quad (34)$$

У машущего крыла, как можно видеть в таблице 3, наиболее консервативным параметром является характерная скорость потока при взмахе $\langle v^* \rangle$. По первым четырем летунам из таблицы, мощности которых должно хватать для висения, ее среднее значение составляет $\langle v^* \rangle = 1.9 \text{ м/с}$, отклонения от среднего значения $\pm 0.2 \text{ м/с}$, а соответствующим выражением для связи подъемной силы и мощности

$$Y = \frac{W}{\langle v^* \rangle} \quad (35)$$

Приравнивая выражения (34) и (35), получим величину мощности W_b , при которой энергозатраты на создание подъемной силы с помощью обоих рассматриваемых способов одинаковы:

$$W_b = k^{10} \left(\frac{2\rho}{\nu} \right)^{3.35} \langle v^* \rangle^{7.7}$$

При $k = 0.80$ и плотности воздуха $\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3$ (полет вблизи поверхности Земли), величина граничной мощности $W_b \approx 8.5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$, что позволяет обеспечить висение объекта массой $m \approx 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ – примерно в полтора майских жука. При этом нагрузка на несущий диск δ составляет около 4.5 Па, что практически согласуется с аппроксимацией (33), а размах винта оказывается в 2 раза большим, чем размах машущего крыла с удлинением $\lambda = 6$. Это соотношение между размерами винта и крыла представляется вполне разумным с конструкторской точки зрения. Если объект крупнее, более экономичным является

использование несущего винта, если объект меньше, то – машущего крыла. Масса шмеля на порядок меньше граничной, и при этих размерах эффективность машущего полета уже настолько велика, что шмели, как уже было показано в разделе IX, в отличие от птиц не стремятся (или не способны) выжать из своих летных характеристик максимум возможного.

Из проведенного анализа следует, что в земных условиях может иметь смысл создавать махолеты – летательные аппараты, использующие машущие крылья, только при очень малых масштабах и с чрезвычайно ограниченными целями, да и то, если удастся создать источники энергии и сенсоры массой максимум в сотни миллиграммов, что не кажется очевидно возможным. Однако, в Солнечной системе есть места, где эффективные махолеты могут быть существенно крупнее. Например, на спутнике планеты-гиганта Сатурна Титане давление азотной атмосферы в 1.45 раза больше, чем на Земле, а средняя температура в 3.05 раза ниже, чем для земной стандартной атмосферы [45]. С учетом слабого различия в молекулярных массах рассматриваемых атмосфер плотность атмосферы на Титане оказывается в 4.3 раза больше, чем на Земле. Тогда граничная мощность на Титане $W_b \approx 11$ Вт, создаваемая при этом подъемная сила $Y \approx 5.8$ Н, и с учетом в 7.3 раза меньшего ускорения свободного падения, граничная масса оказывается примерно равной 4 кг. Поэтому, представляющие технический интерес махолеты-разведчики массой меньше, чем граничная, там, видимо, вполне возможны.

XI. Заключение

На основе вихревой теории стационарного обтекания крыла, импульсной теории несущего винта, теорий гидравлического удара и вихревых дорожек Кармана построена композитная элементарная теория несущих характеристик машущего крыла, использующая уже существующие решения задач гидродинамики. Проведена проверка получаемых с ее помощью результатов по имеющимся эмпирическим данным. Показано, что существуют области, где энергетически эффективными являются либо несущий винт, либо машущее крыло. Получена граница между ними для атмосфер Земли и спутника Сатурна Титана.

Благодарности

Выражаю благодарность А. Г. Ребеко за полезную информацию о «микромеханических летающих насекомых» (MFI).

Литература

1. Yma Sumac – El Cóndor Pasa // <http://www.youtube.com/watch?v=aEgy6Qy7iPc>
2. Д. Кюхеман – Аэродинамическое проектирование самолетов. Москва, «Машиностроение», 1983.
3. Н. С. Аржаников, В. Н. Мальцев – Аэродинамика. Москва, Государственное издательство оборонной промышленности, 1952.
4. Ю. И. Лобановский – Интерференционная концепция аэродинамического проектирования гиперзвуковых компоновок, 2002 // <http://synerjetics.ru/article/aerodin.htm>
5. J. Roskam – Airplane Design: Preliminary Sizing of Airplanes. DARcorporation, 1989.
6. L. Tranelli – Ala di aperture finita. *Promemoria lezione* // <http://www.aero.polimi.it/~trainell/bacheca/slides/slide06.pdf>
7. J. M. Grassmeyer, A. Naghshineh-Pour and others – Multidisciplinary Design Optimization of a Strut-Braced Wing Aircraft with Tip-Mounted Engines. *MAD 98-01-01*, 1998 // http://www.aoe.vt.edu/~mason/Mason_f/MAD980101.pdf
8. Boeing 747 // <http://www.zapl6.com/civ%20fact/civ%20boeing%20747.htm>
9. 1976 Standard Atmosphere Calculator // <http://www.digitaldutch.com/atmoscalc/>
10. У. Джонсон – Теория вертолета, кн. 1. Москва, «Мир», 1983.
11. ОКБ Миля, Ми-26 // http://www.aviastar.org/helicopters_rus/mi-26-r.html
12. Тяжелый военно-транспортный вертолет Ми-26 // <http://www.voron70.narod.ru/mi26.htm>
13. Ми-38 // <http://www.airwar.ru/enc/uh/mi38.html>
14. Bell 214ST Super Transport // <http://www.airwar.ru/enc/uh/bell214st.html>
15. The Bell 214ST SuperTransport // <http://8.5.0.95/info/stats.main?id=76>
16. Ka-226 // <http://www.airwar.ru/enc/uh/ka226.html>
17. EC 120 Colibri // http://www.galsaero.ru/catalog/eurocopter/ec_120_colibri/
18. Douglas DC-3 // http://en.wikipedia.org/wiki/Douglas_DC-3
19. Г. Н. Абрамович – Прикладная газовая динамика. Москва, Наука, 1969.
20. Участие делегации ОАО «МВЗ им. М.И.Миля» в работе 33-го европейского вертолетного форума // <http://www.mi-helicopter.ru/rus/index.php?newsid=270>
21. М. Ван-Дайк и др. Альбом течений жидкости и газа. Москва, «Мир», 1986 // http://www.imec.msu.ru/content/nio/VanDaik/vd_main.html

22. Z. Jane Wang – Two Dimensional Mechanism for Insect Hovering. *Phys. Rev. Lett.* 85, 2000 // http://fysik.sitcore.dtu.dk/upload/fluid.dtu/articles09/jane_wang/2000_prl_wang_hv.pdf
23. C. J. Pennycuik – Power Requirements for Horizontal Flight in the Pigeon *Columba Livia*. *The Journal of Experimental Biology*, 1968, 49 // <http://jeb.biologists.org/cgi/reprint/49/3/527>
24. Н. Е. Жуковский – О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М – Л, Гостехиздат, 1949.
25. Л. Гумилевский – Николай Егорович Жуковский. *Портал «Слово»* // <http://www.portal-slovo.ru/impressionism/36397.php>
26. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе – Теоретическая гидромеханика, т. I. М – Л, Гостехиздат, 1948.
27. М. Хемш, Дж. Нильсен – Аэродинамика ракет. Москва, «Мир», 1989.
28. C. J. Pennycuik – A Wind-Tunnel Study of Gliding Flight in the Pigeon *Columba Livia*. *The Journal of Experimental Biology*, 1968, 49 // <http://jeb.biologists.org/cgi/reprint/49/3/509>
29. Lift-to-drag ratio. *Wikipedia* // http://en.wikipedia.org/wiki/Lift-to-drag_ratio
30. Серая ворона/Corvus cornix // <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/2dcf6eca-33fa-4dca-8338-3ccdb82ebfb6/528.htm>
31. Блог Артема Сапегина // <http://birdwatcher.ru/entry/1768>
32. Cockchafer. *Wikipedia* // <http://en.wikipedia.org/wiki/Cockchafer>
33. Майские жуки. *Wikipedia* // http://ru.wikipedia.org/wiki/Майский_жук
34. Колибри: золушка птичьего царства // <http://www.zooclub.ru/birds/vidy/212.shtml>
35. Колибри (*Trochilidae*) – фотографии // http://www.floranimal.ru/gallery_his.php?flid=4324&p=0
36. Род: Андские кондоры – Vultur // <http://www.apus.ru/site.xp/049053048049124053057055054124.html>
37. Андский кондор. *Wikipedia* // http://ru.wikipedia.org/wiki/Андский_кондор
38. Самые редкие движения крыльев // <http://birds.krasu.ru/index.php?f=gbr>
39. Грифы американские (*Cathartidae*) // http://www.floranimal.ru/gallery_his.php?flid=4281&p=0
40. Шмели–кукушки // <http://zooclub.ru/chlen/nasek/93.shtml>
41. Дубравный шмель // <http://www.shmel.org/bombus/lucorum/>
42. I. Björck – Wind tunnel experiments award flight certificate to bats. *Informationsdienst Wissenschaft* // <http://idw-online.de/pages/en/news249111>
43. Л. С. Ивлев, Ю. А. Довгалоук – Физика атмосферных аэрозольных систем. СПб, НИИХ СПбГУ, 1999 // http://window.edu.ru/window_catalog/files/r30057/spbu045.pdf
44. R. Wood – Fly, Robot Fly. *IEEE Spectrum on Line*, March 2008 // <http://spectrum.ieee.org/print/6017>
45. В. Воробьева – Титан // http://www.allplanets.ru/solar_sistem/saturn/titan_statya.htm

12.11.2008

Ю. И. Лобановский